المحاضرة الثالثة — 2017/10/15 الأحد

علاقات فرينيه: ليكن L منحنياً نظامياً، $\vec{T}$ ، $\vec{N}$ ، $\vec{B}$ متجهات واحدة المماس، الناظم الأساسي، ثنائي الناظم على الترتيب. K ، τ تقوس والتفاف المنحني L المعرفة بالعلاقات السابقة. عندئذٍ يحقق المعادلات الآتية:

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \dot{\vec{T}} = K\vec{N} \quad , \quad \frac{d\vec{N}}{ds} = \dot{\vec{N}} = -K\vec{T} + \tau\vec{B} \quad , \quad \frac{d\vec{B}}{ds} = \dot{\vec{B}} = -\tau\vec{N}$$

علاقات فرينيه في المنحني النظامي، بدلالة الوسيط الطبيعي S. والتي تكتب بالشكل المصفوفي الآتي:

$$\begin{bmatrix} \dot{\vec{T}} \\ \dot{\vec{N}} \\ \dot{\vec{B}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & K & 0 \\ -K & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{T} \\ \vec{N} \\ \vec{B} \end{bmatrix}$$

مبرهنة ((دون برهان)): الشرط اللازم والكافي كي يكون منحنٍ ما (واقع في مستوٍ) مستوياً هو أن يكون التفافه معدوم في كل نقطة من نقاطه.

ملاحظة هامة: يمكن إعادة كتابة علاقات فرينيه بدلالة الوسيط العادي t.

نلاحظ أن:

$$\vec{T}' = \frac{d\vec{T}}{dt} = \frac{d\vec{T}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \dot{\vec{T}} \cdot |\vec{r}'|$$

وكذلك:

$$\vec{N}' = \dot{\vec{N}} \cdot |\vec{r}'| \quad , \quad \vec{B}' = \dot{\vec{B}} \cdot |\vec{r}'|$$

وبالتالي تصبح علاقات فرينيه بدلالة الوسيط t:

$$\vec{T}' = |\vec{r}'| \cdot K\vec{N}$$

$$\vec{N}' = |\vec{r}'| \cdot (-K\vec{T} + \tau\vec{B}) \quad , \quad \vec{B}' = -|\vec{r}'| \cdot \tau\vec{N}$$

ملاحظة 2: لنكتب علاقات متجهات الواحدة $\vec{T}$ ، $\vec{N}$ ، $\vec{B}$ بدلالة الوسيطين t ، S:

$$\vec{T} = \frac{\vec{r}'}{|\vec{r}'|} = \dot{\vec{r}}$$

/ /

$$\vec{N} = \frac{\vec{r}' \times \vec{r}''}{|\vec{r}' \times \vec{r}''|} \quad , \quad \frac{\vec{r}'}{|\vec{r}'|} = \frac{\vec{r}''}{|\vec{r}''|}$$

$$\vec{B} = \frac{\vec{r}' \times \vec{r}''}{|\vec{r}' \times \vec{r}''|} = \vec{r}' \times \frac{\vec{r}''}{|\vec{r}''|}$$

مثال: أوجد تقوس و التفاف و ثلاثية فرينيه للمنحني $\vec{r}(t) = (1+t^2 , t , t^3)$

الحل: $\vec{r}'(t) = (2t , 1 , 3t^2) \quad , \quad \vec{r}''(t) = (2 , 0 , 6t)$

$$\vec{r}'''(t) = (0 , 0 , 6)$$

بالتعويض في علاقات التقوس والالتفاف بدلالة الوسيط t نجد:

$$K(t) = \frac{|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)|}{|\vec{r}'(t)|^3} = \frac{(36t^2 + 36t^4 + 4)^{\frac{1}{2}}}{(4t^2 + 1 + 9t^4)^{3/2}}$$

$$\tau = \frac{(\vec{r}' , \vec{r}'' , \vec{r}''')}{|\vec{r}' \times \vec{r}''|^2} = \frac{-12}{36t^2 + 36t^4 + 4}$$

$$\vec{T} = \frac{\vec{r}'}{|\vec{r}'|} = \frac{(2t , 1 , 3t^2)}{(4t^2 + 9t^4 + 1)^{1/2}}$$

$$\vec{B} = \frac{\vec{r}' \times \vec{r}''}{|\vec{r}' \times \vec{r}''|} = \frac{(6t , -6t^2 , -2)}{(36t^2 + 36t^4 + 4)^{1/2}}$$

$$\vec{N} = \vec{B} \times \vec{T} = \frac{-18t^4 + 2 , -4t - 1 - 18t^3 , 12t^3}{\left[(4t^2 + 1 + 9t^4)(36t^2 + 36t^4 + 4)\right]^{\frac{1}{2}}}$$

ببساطة عكسنا التعويض في علاقات فرينيه بدلالة الوسيط t.

/ /

مثال ٢ : أثبت أن المنحني المعطى بالمعادلة $\vec{r}(t) = (t, 1+t^{-1}, t^{-1}-t)$ هو منحني مستوٍ.

الحل:

$\vec{r}'(t) = (1, -t^{-2}, -t^{-2}-1)$

$\vec{r}''(t) = (0, 2t^{-3}, 2t^{-3})$, $\vec{r}'''(t) = (0, -6t^{-4}, -6t^{-4})$

$$\tau = \frac{(\vec{r}', \vec{r}'', \vec{r}''')}{|\vec{r}' \times \vec{r}''|^2} = 0$$

وذلك لأن الجداء المختلط $(\vec{r}', \vec{r}'', \vec{r}''')$ معدوم لأن $\vec{r}''$ متناسب مع $\vec{r}'''$.

وبالتالي الالتفاف معدوم في كل نقطة من نقاط المنحني أي أن المنحني مستوٍ.

الفصل الثاني : نظرية السطوح

تعريف : وجدنا سابقاً أن السطح هو علاقة بين المتحولات x, y, z من الشكل:

$$F(x, y, z) = 0$$

سنعرف السطح بصورة تحليلية . وسنبدأ بتعريف النطاق المستوي.

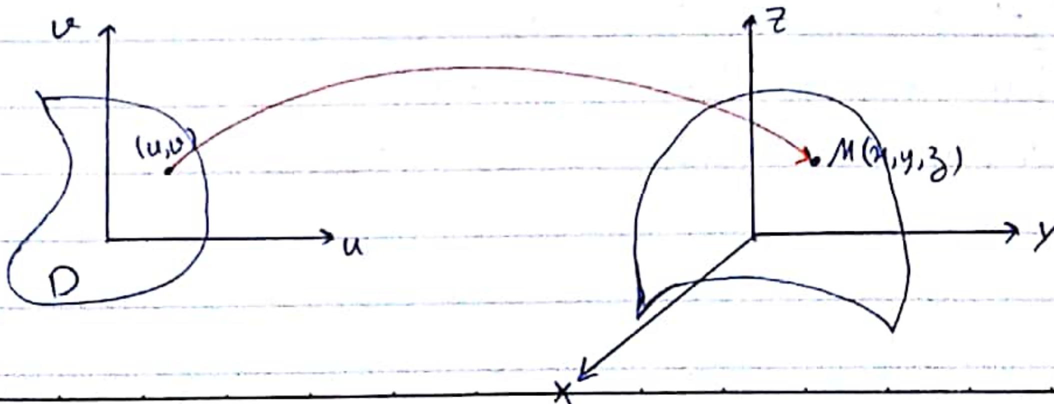
تعريف : نعلم أن أي منحنٍ مغلق في المستوي يجزئه إلى منطقتين ، إحداها محدودة (داخل المنحني) والأخرى غير محدودة (خارج المنحني).

نسمي نطاق مستوٍ ، أي منطقة مستوية مفتوحة مترابطة ومحدودة.



$$\mathring{D} \cup \delta D = \bar{D}$$

تعريف السطح : ليكن D نطاقاً مستوياً $(D = \mathring{D})$ ، لنعرف على $\bar{D}$ ثلاث دوال مستمرة :



$x : \bar{D} \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$(u,v) \longmapsto x(u,v)$

$y : \bar{D} \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$(u,v) \longmapsto y(u,v)$

$z : \bar{D} \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$(u,v) \longmapsto z(u,v)$

عندئذٍ يشكل مجموعة نقاط الفضاء $M(x,y,z)$ التي احداثياتها تحقق العلاقات السابقة.

$$\left.\begin{aligned} x &= x(u,v) \\ y &= y(u,v) \\ z &= z(u,v) \end{aligned}\right\} (u,v) \in D$$

تشكل سطحاً في الفضاء ونرمز له بـ S.

• تسمى العلاقة $\vec{r} = \vec{r}(u,v) = \{x(u,v), y(u,v), z(u,v) : (u,v) \in D\}$ المعادلة المتجهة للسطح.

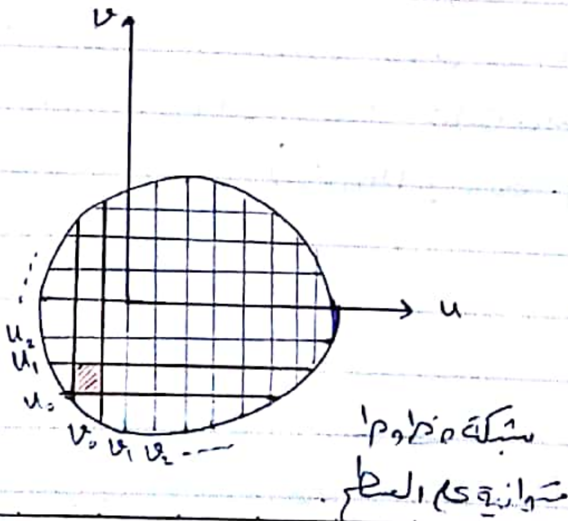
والتي تكتب أيضاً بالشكل: $\vec{r}(u,v) = x(u,v)\vec{i} + y(u,v)\vec{j} + z(u,v)\vec{k}$

يسمى المتجه $\vec{r}(u,v)$ متجه الموضع للنقطة M على S، ويسمى u, v وسيطاً السطح.

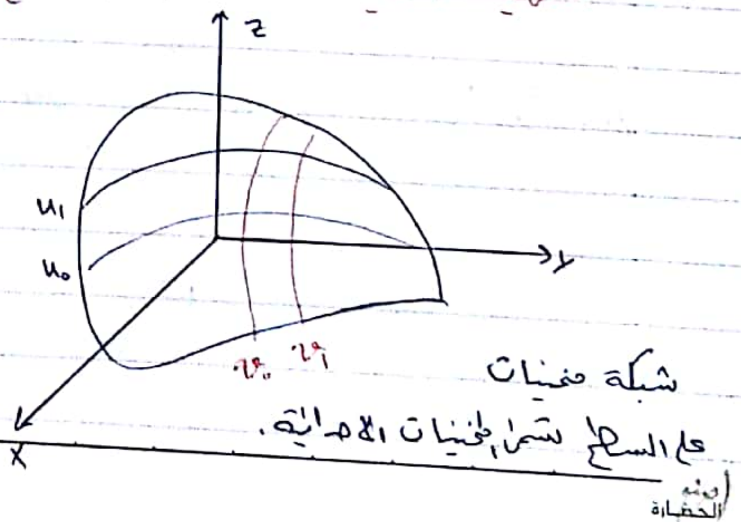
• الآن إذا كانت الدوال $x(u,v), y(u,v), z(u,v)$ تحقق شرط التباين.

عندئذٍ يسمى السطح S سطحاً بسيطاً (النقاط المختلفة من المنطقة D تقابلها نقاط مختلفة من السطح S).

تعريف المنحنيات الاحداثية على سطح:



شبكة مستقيمات متوازية على السطح



شبكة منحنيات على السطح تسمى المنحنيات الاحداثية.

لتكن S سطحاً بسيطاً معرفاً على النطاق المستوي D ولنأخذ النقطة $v = v_0$ من المنطقة D (ثبتنا الوسيط v وجعلنا u يتحول). عندئذٍ تمثل المعادلة:

$$\vec{r} = \vec{r}(u, v_0) = (x(u, v_0), y(u, v_0), z(u, v_0))$$

منحنياً واقعاً على السطح S، يسمى المنحني الإحداثي ذي الوسيط u $(v = v_0)$.

وإذا أخذنا $u = u_0$ أي ثبتنا الوسيط u وجعلنا v تتحول $(v_1 \leq v \leq v_2)$

عندئذٍ تمثل المعادلة:

$$\vec{r} = \vec{r}(u_0, v) = (x(u_0, v), y(u_0, v), z(u_0, v))$$

منحنياً على السطح يسمى المنحني الإحداثي ذي الوسيط v $(u = u_0)$.

تشكل المنحنيات الإحداثية على السطح شبكة خطوط تسمى الخطوط الإحداثية على S.

تعريف السطح البسيط محلياً: ليكن السطح S معرفاً على النطاق D.

نقول إنه إذا وجد لكل نقطة من نقاط السطح جواراً بحيث تشكل نقاط السطح الواقعة في هذا الجوار سطحاً بسيطاً، سوف نرى أن سطح الكرة وسطح الطارة كل منهما سطح ليس بسيط إنما بسيط محلياً.

أمثلة: $F(x,y,z) = 0$ الضمنية

لتكن المعادلة الظاهرية للسطح $z = f(x,y)$ دالة مستمرة على النطاق $\mathbb{R}^2 \supset \bar{D}$

عندئذٍ مجموعة نقاط الفضاء:

$$S = \{ M(x,y,z) \; ; \; z = f(x,y) \; , \; (x,y) \in D \}$$

تشكل سطحاً بسيطاً. $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

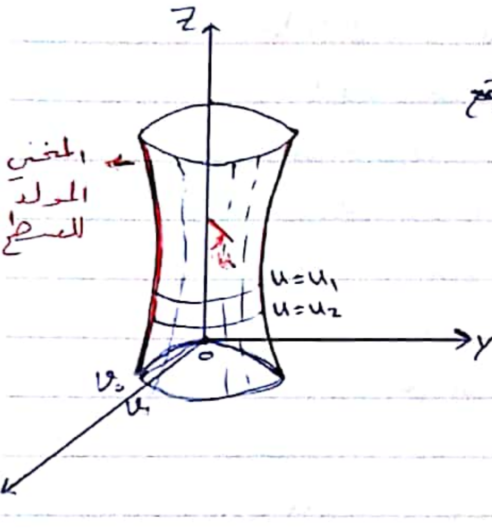
وذلك لأنه من أجل أي نقطتين مختلفتين $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in D$

تقابلها نقطتان مختلفتان من S.

$$M_1(u_1, v_1, z(u_1, v_1)) \quad , \quad M_2(u_2, v_2, z(u_2, v_2))$$

/ /

بعض السطوح الشهيرة :



السطح الدوراني : هو سطح ينتج عن دوران منحنٍ مستوٍ يقع في المستوي XOZ ، معطى بالمعادلتين

$$\gamma \begin{cases} x = \phi(v) \\ z = \psi(v) \end{cases}$$

بزاوية قدرها u ، ينتج سطحاً معادلاته الوسيطية هي :

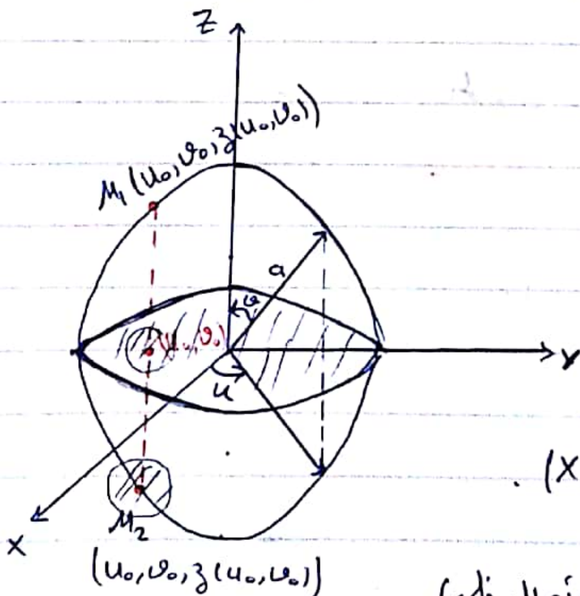
$$x = \phi(v) . \cos u$$
$$y = \phi(v) . \sin u$$
$$z = \psi(v)$$

الخطوط الاحداثية على السطح الدوراني :

الخط ذي الوسيط u (u متحول و v ثابت) هو دائرة ، ومجموعة الدوائر تسمى خطوط العرض ، وتنتج هذه الدوائر عن تقاطع السطح الدوراني بمستوٍ يعامد OZ .

الخط ذي الوسيط v $(u=u_0)$ ينتج عن تقاطع السطح بمستوٍ يمر من OZ وتسمى خطوط التنصيف . وكمثال على ذلك :

١ـ سطح الكرة : هي سطح دوراني ينتج عن دوران نصف دائرة نصف قطرها a حول OZ ، والقطعة المشتركة بين داخلية الكرة والمحور OZ تمثل قطر الكرة .



وتعطى بالمعادلات الوسيطية بالشكل :

$$x = a \sin v . \cos u \quad \to \phi(v)$$
$$y = a \sin v . \sin u$$
$$z = a \cos v \to \psi(v)$$

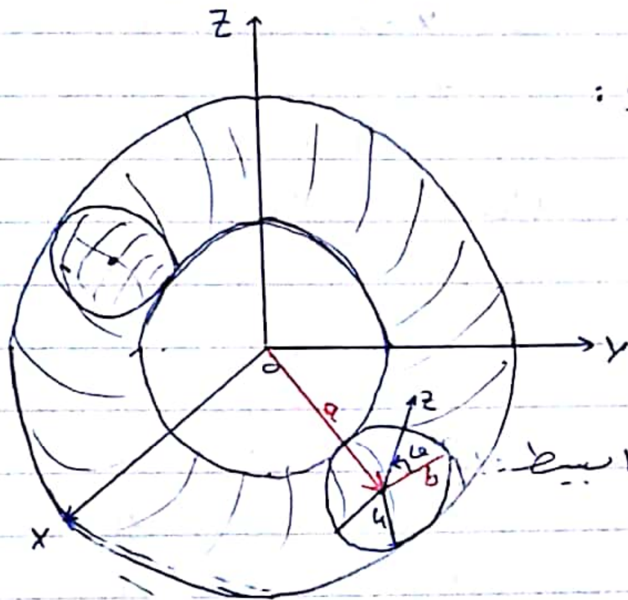
$$0 \le u \le 2\pi \quad , \quad 0 \le v \le \pi$$

الكرة ليست سطحاً بسيطاً ، لأنه كل نقطة من الظاهر المفتوح (القرص المفتوح الذي نصف قطره a ومركزه O واقع في المستوي XOY) تقابلها نقطتان من سطح الكرة .

لكن إذا أخذنا نصف سطح الكرة (العلوي أو السفلي) . فإنه يكون سطحاً بسيطاً . لذلك نقول أن سطح الكرة سطح بسيط محلياً .

/ /

2- سطح الطارة: سطح ينتج عن دوران دائرة نصف قطرها b حول المحور oz دورة كاملة، بحيث مركز هذه الدائرة يبعد عن oz بمقدار a حيث a>b و a,b = const



وبالتالي المعادلات الوسيطية للدائرة هي:

$$x = (a + b\sin v).\cos u$$

$$y = (a + b\sin v).\sin u$$

$$z = b\cos v$$

حيث:

$$0 \le v \le 2\pi \quad , \quad 0 \le u \le \pi$$

نلاحظ أن سطح الطارة ليس بسيط إنما بسيط محلياً.

- وكذلك سطوح الدرجة الثانية:

3- مجسم القطع الناقص.

4- = = الزائد ذو الفرع الواحد.

5- = = = ذو الفرعين $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

6- = = المكافئ الناقصي.

7- = = = الزائدي $x^2 + y^2 = 2z$

8- = = المخروطي الدوراني.